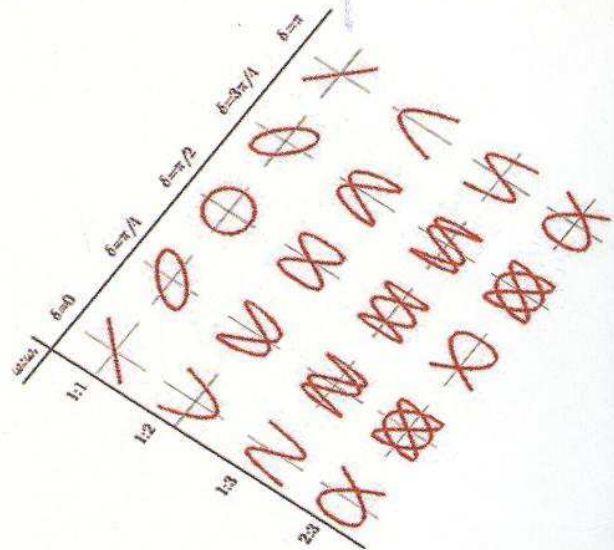
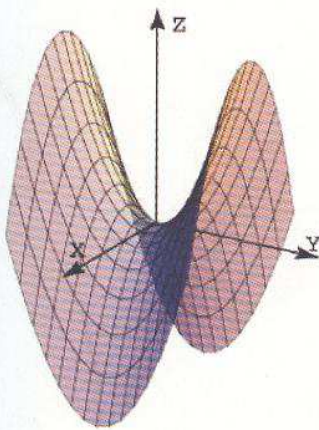
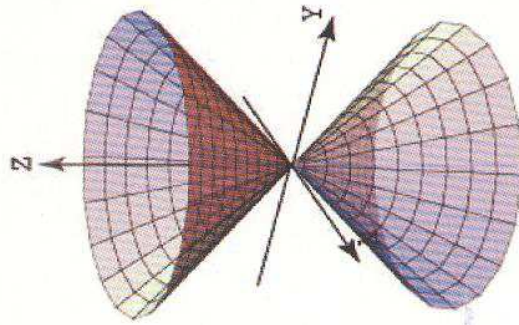


Vectores & Geometría Analítica



Ing. José Juan Ricart B.

Prologo

El presente libro esta destinado fundamentalmente a los estudiantes de los centros superiores de enseñanza técnica, abarcando todas las secciones del curso de Geometría Analítica Básica, a fin de fortalecer el conocimiento que debe adquirir el estudiante para el ingreso a las Universidades.

Como fundamento básico de la Geometría Analítica este libro se encara desde el punto de vista vectorial. En los dos primeros capítulos se da un especial énfasis al Algebra de Vectores, como fundamento de los capítulos posteriores.

Los siguientes capítulos hacen referencia al estudio de la recta, el plano y las cónicas, con sus diversos tipos de ecuaciones.

Los dos últimos capítulos tratan sobre las ecuaciones paramétricas y sistemas de ecuaciones polares.

Al comienzo de cada capítulo se da una exposición teórica de las nociones fundamentales que el estudiante debe adquirir, mediante definiciones y ejemplos, culminando cada capítulo con una serie de ejercicios donde se exponen muy detalladamente sus resoluciones.

Ing. José Juan Ricart Bossi

Vectores & Geometría Analítica**Índice**

1-	<u>Vectores</u>	
1.1-	Introducción	1
1.2-	Espacio vectorial ó espacio lineal	1
1.3-	Segmento orientado de recta – vector	2
1.4-	Módulo de un vector	3
1.5-	Vector nulo	3
1.6-	Vectores iguales	4
1.7-	Vectores opuestos	4
1.8-	Vectores unitarios – versores	4
1.9-	Vectores colineales	4
1.10-	Vectores coplanares	5
	<u>Operaciones geométricas con vectores</u>	
1.11-	Suma de vectores	5
1.12-	Diferencia entre dos vectores	6
1.13-	Multiplicación de un vector por un número real	6
	Ejercicios sobre operaciones geométricas con vectores	8
	<u>Ejes – Bases – Coordenadas</u>	
1.14-	Vector unidimensional - Base	12
1.15-	Dependencia e independencia lineal entre dos vectores de un espacio unidimensional	12
1.16-	Dependencia e independencia lineal entre vectores (Definición general)	13
	Algunas propiedades importantes de la Dependencia e Independencia lineal	16
	Ejercicios propuestos sobre Dependencia e Independencia lineal	17
1.17-	Sistema de coordenadas bidimensionales – coordenadas de un punto	20
1.18-	Sistema cartesiano ortogonal en E^2	21
1.19-	Vector de posición	21
1.20-	Vector definido por dos puntos	22
	Ejercicios sobre vectores de posición	22
	<u>Operaciones analíticas con vectores</u>	
1.21-	Igualdad analítica de vectores	25
1.22-	Suma y diferencia analítica de vectores	25
1.23-	Multiplicación analítica de un vector por un escalar	26
1.24-	División de un segmento de recta en una razón dada	26
1.25-	Punto medio de un segmento de recta	27
1.26-	Condiciones de paralelismo entre dos vectores	29
	Ejercicios generales sobre vectores	30

2-	<u>Productos de vectores</u>	
2.1-	Producto escalar entre dos vectores	
2.1-1.	Propiedades	37
2.1-2.	Módulo de un vector	38
2.1-3.	Condición de perpendicularidad entre dos vectores	39
2.1-4.	Producto escalar entre dos vectores dados por sus componentes cartesianas	39
2.1-5.	Módulo de un vector expresado por sus componentes Cartesianas	40
2.1-6.	Perpendicularidad entre dos vectores expresados por sus componentes cartesianas	41
2.1-7.	Distancia entre dos puntos	42
2.1-8.	Ángulo entre dos vectores	43
2.1-9.	Ángulos y cosenos directores de un vector	43
2.1-10.	Proyección de un vector sobre otro	43
2.1-11.	Interpretación física del producto escalar	44
	Ejercicios sobre producto escalar	45
2.2-	Producto vectorial entre dos vectores	
2.2-1.	Definición	51
2.2-2.	Propiedades	51
2.2-3.	Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial	53
2.2-4.	Interpretación física del producto vectorial Momento	53
	Ejercicios sobre producto vectorial	54
2.3-	Producto mixto de tres vectores	
2.3-1.	Definición	62
2.3-2.	Propiedades	62
2.3-3.	Interpretación geométrica del módulo del producto mixto	63
	Ejercicios	66
3-	<u>Rectas en el plano</u>	
3.1	Ecuación vectorial de la recta – Vector direccional	71
	Ecuación paramétrica y simétrica de la recta	71
	Ecuación general ó implícita de la recta	71
3.2	Recta definida por dos puntos	72
3.3	Inclinación – Pendiente ó coeficiente angular de una recta	73
3.4	Pendiente de una recta que pasa por dos puntos	74
3.5	Ecuación de la recta: Punto – pendiente	74
3.6	Ecuación de la recta: Pendiente - ordenada a origen	76
3.7	Ecuación segmentaria de la recta	76
3.8	Rectas concurrentes	78
3.9	Ecuaciones de rectas particulares	
3.9.1	Rectas que pasan por el origen de coordenadas	79
3.9.2	Rectas paralelas al eje de abscisas	79
3.9.3	Rectas paralelas al eje de ordenadas	79

3.10.1	Pendiente y ordenada a origen de una recta dada su ecuación general	80
3.10.2	Rectas paralelas	80
3.10.3	Rectas coincidentes	80
3.10.4	Rectas perpendiculares	81
3.10.5	Ángulo entre dos rectas	81
3.11	Ecuación normal de la recta	82
3.12	Relaciones entre las ecuaciones: normal y general de una recta	83
3.13	Distancia de un punto a una recta	83
3.14	Distancia entre rectas paralelas	84
3.15	Ecuación de la bisectriz de dos rectas	84
	Ejercicios sobre rectas en el plano	87
4-	<u>Planos en el espacio E^3</u>	
4.1-	Ecuación vectorial del plano - Vector direccional	99
	Ecuación general del plano	99
4.2-	Planos particulares	
	a) Planos perpendiculares a los planos coordenados	101
	b) Planos perpendiculares a los ejes coordenados	102
	c) Planos que pasan por el origen de coordenadas	103
	d) Planos perpendiculares entre sí	103
	e) Planos paralelos entre sí	103
4.3-	Ecuación del plano que pasa por tres puntos	107
4.4-	Ecuación segmentaria del plano	108
4.5-	Forma normal del plano	109
4.6-	Relaciones entre la forma normal y la ecuación general de un plano	109
4.7-	Distancia de un punto a un plano	112
4.8-	Distancia entre planos paralelos	116
4.9-	Ángulo diedro entre planos	117
4.10	Plano bisector	118
	Ejercicios generales sobre planos	121
5-	<u>Rectas en el espacio E^3</u>	
5.1-	Ecuación vectorial de la recta - Vector direccional	127
	Ecuación paramétrica y ecuación simétrica ó canónica de la recta	127
5.2-	Ángulos directores de la recta	128
5.3-	Ecuación de la recta que pasa por dos puntos	130
5.4-	Ecuación de la recta como intersección de dos planos	131
5.5-	Familia de planos que pasan por una recta	134
5.6-	Condiciones de: paralelismo y perpendicularidad entre rectas	135
5.7-	Condiciones de: paralelismo y perpendicularidad entre planos y rectas	138
5.8-	Ecuaciones de rectas particulares:	
	5.8.1- Rectas que pasan por el origen de coordenadas	139
	5.8.2- Rectas paralelas a los ejes coordenados	140

5.8.3- Rectas paralelas a los planos coordenados	140
5.9- Intersecciones de rectas y planos	141
5.7- Posiciones relativas entre rectas	145
Ejercicios sobre rectas en el espacio E^3	149
6- <u>Traslación y Rotación de ejes coordenados</u>	
6.1 Traslación paralela de ejes cartesianos	153
6.2 Rotación de ejes cartesianos en torno a su origen	154
Ejercicios	155
7 <u>CÓNICAS</u>	
7.1 <u>Circunferencia</u>	
7.1.1 Definición	159
7.1.2 Ecuación general de la circunferencia	159
7.1.3 Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados	161
7.1.4 Determinación del centro y radio de una circunferencia dada la ecuación general	162
7.1.5 Casos particulares de circunferencias	
a) Circunferencia con centro en el origen de coordenadas	164
b) Ecuación de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas	164
c) Ecuación de una circunferencia tangente al eje de abscisas	164
d) Circunferencia con radio nulo	164
e) Circunferencias con radios imaginarios	165
7.1.6 Posiciones relativas entre circunferencias y rectas	165
7.1.7 Intersección entre una circunferencia y una recta	166
7.1.8 Intersecciones entre circunferencias	167
Ejercicios resueltos sobre circunferencias	168
Ejercicios propuestos sobre circunferencias	172
7.2- <u>Parábola</u>	
7.2.1 Definición	175
7.2.2 Ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y ejes, los ejes coordenados	175
Ejemplos	177
7.2.3 Construcción de la parábola	179
7.2.4 Excentricidad de una parábola	180
7.2.5 Cuerda focal mínima de una parábola	180
7.2.6 Ecuación de la parábola con vértice fuera del origen de coordenadas y eje paralelo a los ejes coordenados	181
7.2.7 Ecuación general ó implícita de la parábola	182
7.2.8 Ecuación explícita de la parábola	182
Ejemplos	183
7.2.9 Intersección de una parábola y una recta	185
Ejercicios resueltos sobre parábolas	188

	Ejercicios propuestos sobre parábolas	192
7.3	Elipse	
7.3.1	Definición	193
7.3.2	Denominaciones	193
7.3.3	Ecuación cartesiana de la elipse con centro en el origen de coordenadas y eje mayor, el eje de abscisas	194
7.3.4	Ecuación cartesiana de la elipse con centro en el origen de coordenadas y eje mayor, el eje de ordenadas	195
7.3.5	Excentricidad y directrices de una elipse	196
7.3.6	Longitud de la cuerda focal mínima de una elipse	197
7.3.7	Construcción por puntos de una elipse	197
	Ejercicios sobre elipses con centro en el origen	199
7.3.8	Ecuación cartesiana de la elipse con centro fuera del origen de coordenadas y ejes paralelos a los ejes cartesianos	203
7.3.9	Ecuación general de la elipse	205
	Ejemplos	205
7.3.10	Intersección de una elipse y una recta	208
	Ejercicios resueltos sobre elipses	210
	Ejercicios propuestos sobre elipses	217
7.4	Hipérbola	
7.4.1	Definición	219
7.4.2	Denominaciones	219
7.4.3	Ecuación cartesiana de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas y eje real, el eje de abscisas	220
7.4.4	Ecuación cartesiana de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas y eje real, el eje de ordenadas	221
7.4.5	Excentricidad y directrices de una hipérbola	222
7.4.6	Longitud de la cuerda focal mínima de una hipérbola	223
	Ejercicios sobre hipérbolas con centro en el origen	223
7.4.7	Asíntotas de la hipérbola	226
7.4.8	Construcción por puntos de una hipérbola	228
7.4.9	Ecuación cartesiana de la hipérbola con centro fuera del origen de coordenadas y ejes paralelos a los ejes cartesianos	229
7.4.10	Ecuación general de la hipérbola	231
	Ejemplos	232
7.4.11	Intersección de una hipérbola y una recta	234
	Ejercicios resueltos sobre hipérbolas	237
	Ejercicios propuestos sobre hipérbolas	245
8-	Coordenadas Polares	
8.1-	Sistema de coordenadas polares	247
8.2-	Relación entre los sistemas de coordenadas cartesianas y polares	248
	Ejemplos	249
8.3-	Ecuación de la recta en coordenadas polares	251

8.4- Ecuación general de las cónicas en coordenadas polares	252
8.5- Ecuación polar de la circunferencia	255
8.6- Casos particulares de circunferencias	236
Ejercicios sobre ecuaciones polares de cónicas	259

9- Ecuaciones Paramétricas

9.1- Ecuaciones paramétricas de curvas planas	263
9.2- Ecuaciones paramétricas de las cónicas	264
a) Circunferencia	264
b) Elipse	264
c) Hipérbola	265
d) Parábola	265
Ejercicios sobre ecuaciones paramétricas	266

Apéndice 1: Lugares geométricos

Definición	271
Ejemplos	271
Ejercicios propuestos sobre Lugares geométricos	274

Apéndice 2: Ecuación General de 2do. grado a dos variables

1- Definición	279
2- Cónicas	279
3- Centro de una curva	279
4- Invariantes ortogonales	279
Curvas con centro	281
Curvas sin centro	287
Resumen general	289
Ejemplos de aplicación	290
Ejercicios propuestos	298